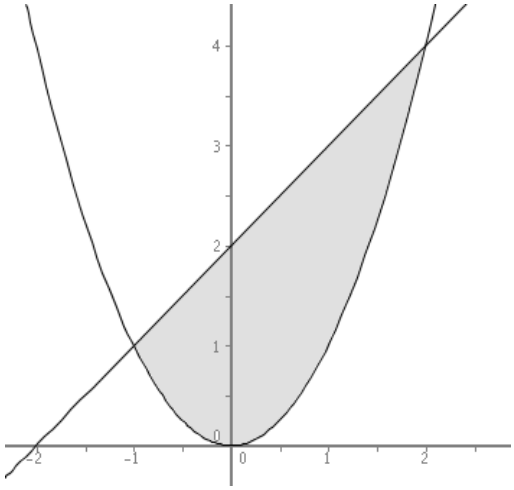
Intégrales – Exercices corrigés

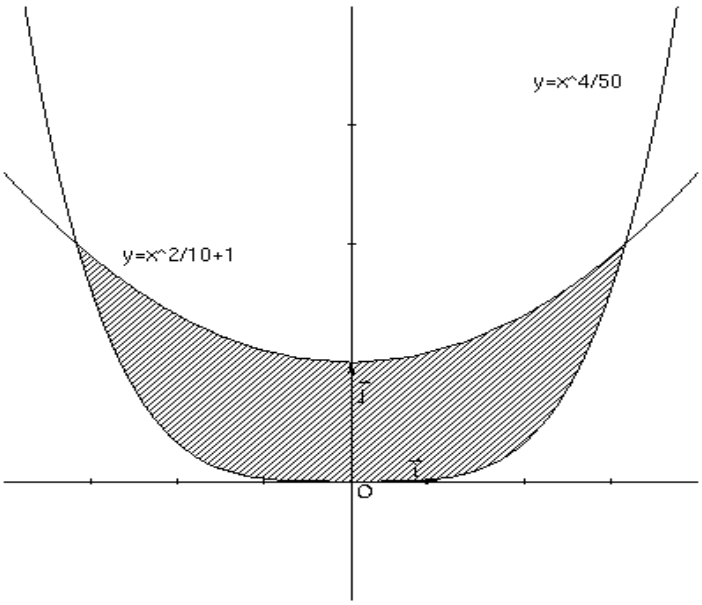
A. Aire délimitée par deux courbes

Exercice 1



La figure représente la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = x+2$.
Calculer l'aire de la partie grisée.

Exercice 2



La figure donne les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\frac{x^4}{50} \text{ et } g(x)=\frac{x^2}{10}+1$$

Calculer l'aire de la partie grisée.

B. Calculs d'intégrales

Exercice 1

1- Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{2x^2+3x+1}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x+1}$.

2- Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{2x^2+3x+1}$.

Exercice 2

1- Calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$.

2- Montrer que $\frac{1}{1+e^t}=1-\frac{e^t}{1+e^t}$. En déduire $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt$.

Exercice 3

Calculer $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$ en effectuant une intégration par parties.

C. Intégrales et encadrements

Exercice 1

1- Pour tout réel $t \geqslant 3$, montrer que $0 \leqslant e^{\frac{-t^2}{2}} \leqslant e^{\frac{-3}{2}t}$.

2- Soit $I(\lambda)=\int_3^\lambda e^{\frac{-x^2}{2}}dx$. Montrer que, pour tout $\lambda \geqslant 3$, $0 \leqslant I(\lambda) \leqslant 0{,}008$.

Exercice 2

1) Soit f la fonction de la variable u définie sur $]-\infty; 0]$ par $f(u) = e^u - 1 - u$.
Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty; 0]$, en déduire le signe de f.

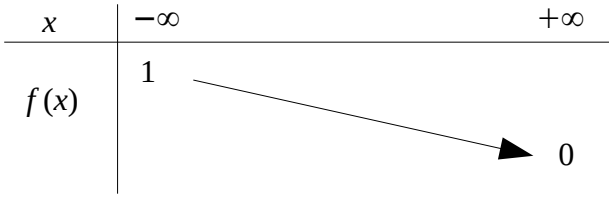
2) Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par $g(u) = e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}$.
Dresser le tableau de variation de g sur $]-\infty; 0]$, en déduire le signe de g.

3) Justifier à l'aide des deux questions précédentes que pour tout réel x on a :
$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

4) En déduire une valeur approchée à 0,05 près de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

D. Integrale et suite

I- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.
On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 1cm sur l'axe des abscisses et de 10cm sur l'axe des ordonnées.
On admet que la fonction f a le tableau de variation suivant :



On donne d'autre part le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,99	0,98	0,94	0,85	0,69	0,48	0,29	0,15	0,07

Tracer la courbe C, ainsi que ses asymptotes.

II- Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction F.

2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$.

   b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

   c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :
   $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2\ln 2$
   $F(x) = \ln\frac{e^x}{1+e^x} - f(x) + 2\ln 2$

3. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$, puis exprimer cette aire en cm².

4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

III- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^k)$.

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine situé sous la courbe C dont l'aire, en unités d'aire, est u_4, c'est à dire $1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3) + 1\times f(4)$.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

   b) Comparer u_n et $F(n)$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

E. Irrationnalité du nombre *e*

e est le nombre réel tel que ln *e* =1. Le but du problème est de montrer que *e* n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec *p* et *q* entiers.

Pour tout entier $n > 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x} dx$.

2) a) Montrer que pour tout *x* de [0; 1]: $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n$.

b) Exprimer en fonction de l'entier *n* l'intégrale $J_n = \int_0^1 x^n dx$.

c) En déduire que pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

3) Montrer que, pour tout $n > 0$, on a $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$.

4) Pour tout entier $n > 0$ on pose $k_n = n!e - I_n$.

a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n.

b) Calculer k_1 .

c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur *n* que k_n est un nombre entier pour tout *n* strictement positif.

d) Montrer que pour tout $n > 1$, le nombre $n!\, e = k_n + I_n$ n'est pas un nombre entier.

5) Soient *p* et *q* deux entiers strictement positifs, montrer que pour $n \geqslant q$, $\frac{n!\, p}{q}$ est un nombre entier.

En déduire, à l'aide de 3b) et c) que *e* n'est pas un nombre rationnel (On pourra raisonner par l'absurde).

A. Aire délimitée par deux courbes

Exercice 1

La droite et la parabole se coupent aux points dont les abscisses sont solutions de l'équation $x^2 = x + 2$, c'est à dire $x = -1$ ou $x = 2$.

L'aire de la partie grisée est donc $A = \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx$.

Comme $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}$ est une primitive de $x + 2 – x^2$, on a

$A = F(2) – F(-1) = \frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$.

Exercice 2

Les deux courbes se coupent aux points dont les abscisses sont solutions de l'équation $\frac{x^4}{50}-\frac{x^2}{10}-1=0$. En posant $X = x^2$ et en multipliant par 50, on obtient $X^2 – 5X – 50 = 0$.

Ce trinôme a 2 solutions qui sont X = 10 et X = -5. Comme $X = x^2$, X doit être positif, donc finalement $x^2 = 10$ et les abscisses des points d'intersection sont $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.

Comme entre $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$, $\frac{x^2}{10}+1\geqslant\frac{x^4}{50}$, l'aire de la partie grisée est

$A = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}}\left(\frac{x^2}{10}+1-\frac{x^4}{50}\right)dx$. En remarquant la symétrie de la figure, on a aussi

$A = 2\int_{0}^{\sqrt{10}}\left(\frac{x^2}{10}+1-\frac{x^4}{50}\right)dx = 2\left[\frac{x^3}{30}+x-\frac{x^5}{250}\right]_0^{\sqrt{10}} = 2\left(\frac{\sqrt{10}^3}{30}+\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}^5}{250}\right)$.

D'où $A = 2\left(\frac{10\sqrt{10}}{30}+\sqrt{10}-\frac{10\sqrt{10}}{250}\right) = \frac{28\sqrt{10}}{15}$.

B. Calculs d'intégrales

Exercice 1

1- $\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x+1}=\frac{ax+a+2bx+b}{(2x+1)(x+1)}=\frac{x(a+2b)+a+b}{2x^2+3x+1}$.

Pour que cette expression soit égale à $\frac{1}{2x^2+3x+1}$, il suffit que $\begin{cases}a+2b=0\\a+b=0\end{cases}$, ce qui donne $a = 2$ et $b = -1$. Ainsi $\frac{1}{2x^2+3x+1}=\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}$.

2- $\int_1^2\frac{dx}{2x^2+3x+1}=\int_1^2\frac{2}{2x+1}dx-\int_1^2\frac{1}{x+1}dx$.

Sur [1; 2], les fonctions $2x+1$ et $x+1$ sont positives, de dérivées respectives 2 et 1. On reconnaît la forme u'/u, et on en déduit que ln $(2x+1)$ et ln $(x+1)$ sont des primitives de $\frac{2}{2x+1}$ et $\frac{1}{x+1}$.

Ainsi $\int_1^2\frac{dx}{2x^2+3x+1}=\left[\ln(2x+1)-\ln(x+1)\right]_1^2=\ln 5-\ln 3-\ln 3+\ln 2=\ln\frac{10}{9}$.

Exercice 2

1- Comme la dérivée de $1 + e^t$ est e^t, on reconnaît la forme u'/u. $\ln(1+e^t)$ est donc une primitive de $\frac{e^t}{1+e^t}$ et $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt = \left[\ln(1+e^t)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

2- $1 - \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t} = \frac{1}{1+e^t}$. On en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$. En tenant compte du résultat précédent, on obtient $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

Exercice 3

En posant $u'(x) = x^2$, d'où $u(x) = \frac{x^3}{3}$, puis $v(x) = \ln x$, d'où $v'(x) = \frac{1}{x}$, on obtient effectuant une intégration par parties :

$$\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}.$$

C. Intégrales et encadrements

Exercice 1

1- Comme une exponentielle est toujours positive, on a bien $0 \leqslant e^{\frac{-t^2}{2}}$. D'autre part, on a $\frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}t}} = e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}t}$. La fonction $\varphi(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t$, a pour dérivée $\varphi'(t) = -t + \frac{3}{2}$ qui est négative lorsque $t \geqslant 3$. φ est donc décroissante sur [3; +∞[, et pour tout $t \geqslant 3$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(3)$. Comme $\varphi(3)=0$, on en déduit que pour tout $t \geqslant 3$, $\varphi(t) \leqslant 0$, donc que $e^{\varphi(t)} \leqslant 1$.

Finalement, cela donne $\frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{e^{\frac{-3}{2}t}} \leqslant 1$, donc $e^{\frac{-t^2}{2}} \leqslant e^{\frac{-3}{2}t}$.

2- Soit $I(\lambda) = \int_3^\lambda e^{\frac{-x^2}{2}}dx$.

Pour tout réel $t \geqslant 3$, $0 \leqslant e^{\frac{-t^2}{2}} \leqslant e^{\frac{-3}{2}t}$, on en déduit que si $\lambda \geqslant 3$, $\int_3^\lambda 0\, dt \leqslant \int_3^\lambda e^{\frac{-t^2}{2}}dt \leqslant \int_3^\lambda e^{\frac{-3}{2}t}dt$,

soit $0 \leqslant I(\lambda) \leqslant \int_3^\lambda e^{\frac{-3}{2}t}dt$.

$-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}$ étant une primitive de $e^{\frac{-3}{2}t}$, on a

$$\int_3^\lambda e^{-\frac{3}{2}t}dt = \left[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\right]_3^\lambda = -\frac{2}{3}\left(e^{-\frac{3}{2}\lambda} - e^{-\frac{9}{2}}\right) = \frac{2}{3}e^{-\frac{9}{2}} - \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda}.$$

Comme $e^{\frac{-3}{2}\lambda}$ est positif et comme $\frac{2}{3}e^{\frac{-9}{2}} < \mathbf{0}\quad 8$, on a bien , pour tout $\lambda \geqslant 3$,

$0 \leqslant I(\lambda) \leqslant 0{,}008$.

Exercice 2

1) Pour tout u de $]-\infty; 0]$ $f(u) = e^u - 1 - u$ et $f'(u) = e^u - 1$.

$e^u - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^u \leqslant 1 \Leftrightarrow u \leqslant 0$.

$f(0) = 0$;

$\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ donc $\lim\limits_{u\to-\infty} f(u) = +\infty$.

On obtient le tableau de variation de f sur $]-\infty; 0]$.

u	$-\infty$		0
$f'(u)$		$-$	
$f(u)$	$+\infty$	↘	0

f a pour minimum absolu 0 sur $]-\infty; 0]$ donc pour tout u de $]-\infty; 0]$ $\boldsymbol{f(u) \geq 0}$

2)Pour tout u de $]-\infty; 0]$, $g(u) = e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}$ et $g'(u) = e^u - 1 - u = f(u) \geq 0$.

$g(0) = 0$; $\lim\limits_{u\to-\infty} -1-u-\frac{u^2}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ donc $\lim\limits_{u\to-\infty} g(u) = -\infty$.

On obtient le tableau de variation de g sur $]-\infty; 0]$.

u	$-\infty$		0
$g'(u)$		$+$	
$g(u)$	$-\infty$	↗	0

g a pour maximum absolu 0 sur $]-\infty; 0]$ donc pour tout u de $]-\infty; 0]$, $\boldsymbol{g(u) \leq 0}$.

3) Comme $f(u) \geq 0$ et $g(u) \leq 0$ pour tout u de $]-\infty; 0]$, on a $1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}$.

Pour tout x réel, $-x^2 \in]-\infty; 0]$; on peut donc remplacer u par $-x^2$, donc pour tout réel x on a :

$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

4) En utilisant les propriétés « ordre et intégrale » vues en cours, comme $1 > 0$ on a

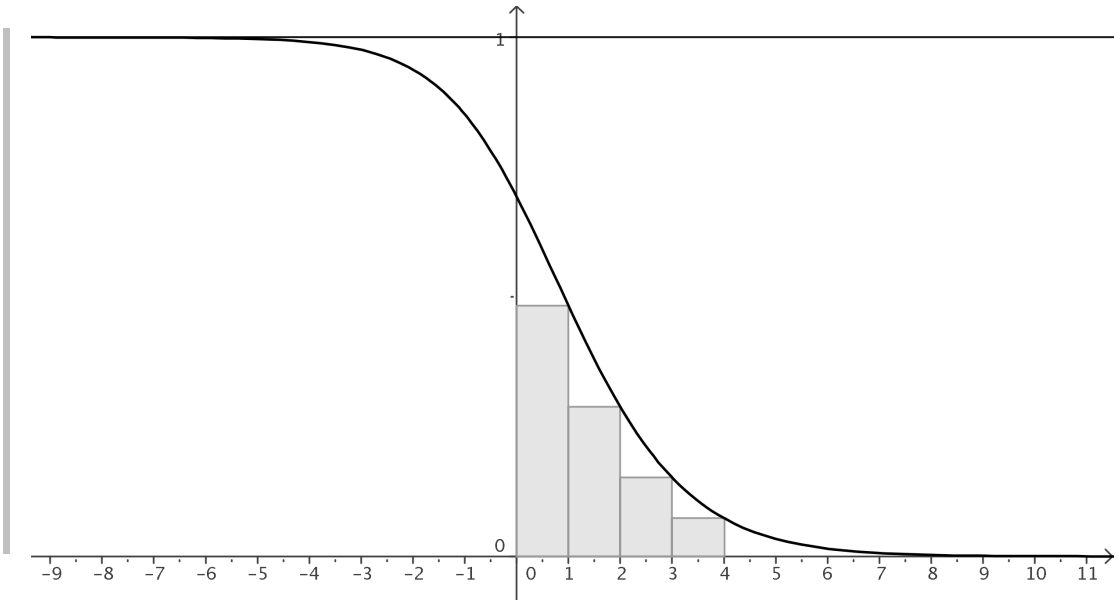
$\int_0^1 (1-x^2)\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 (1-x^2+\frac{x^4}{2})\,dx$,

$\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1$ donc $\frac{2}{3} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{2}{3}+\frac{1}{10}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{20}$ est une valeur approchée à 0,05 près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

D. Integrale et suite

1. Courbe.



II-

1- F'(x) = f (x) = $e^{-x}\ln(1+e^x)$ qui est toujours positif. F est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

2- a) Comme $\frac{1}{1+e^t}=1-\frac{e^t}{1+e^t}$, $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^x 1\mathrm{dt} - \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$. Comme $\ln(1+e^t)$ est une primitive de $\frac{e^t}{1+e^t}$, on a $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = x - \ln(1+e^x) + \ln(1+e^0) = x - \ln(1+e^x) + \ln 2$.

b) On pose u(t) = $\ln(1+e^t)$, d'où u'(t) = $\frac{e^t}{1+e^t}$, et v'(t) = e^{-t}, d'où v(t) = $-e^{-t}$. On en déduit, à l'aide d'une intégration par parties, que

F(x) = $\int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt = [-e^{-t}\ln(1+e^t)]_0^x - \int_0^x \frac{-e^{-t}e^t}{1+e^t}\,dt$.

Ceci donne F(x) = $-e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln 2 + \int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln 2 + x - \ln(1+e^x) + \ln 2$.

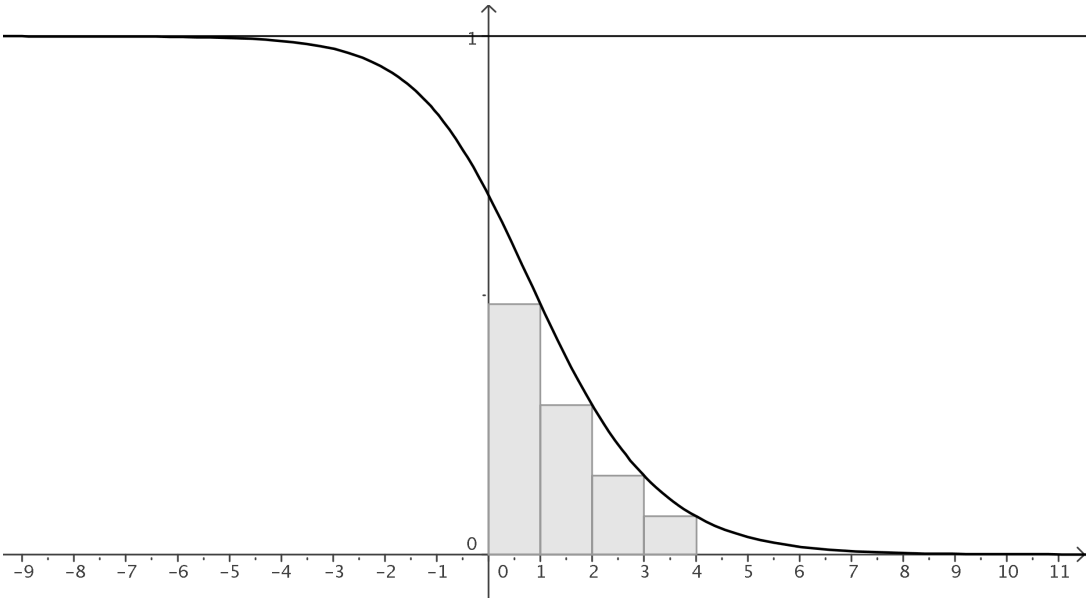
c)Comme f (x) = $e^{-x}\ln(1+e^x)$, le résultat précédent s'écrit aussi
F(x) = $x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$.
En remarquant que $x = \ln e^x$, on obtient F(x) = $\ln e^x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$, soit finalement
F(x) = $\ln\frac{e^x}{1+e^x} - f(x) + 2\ln 2$.

3- L'aire demandée, exprimée en unité d'aire, est $\int_0^4 f(t)\,dt$ = F(4)≈ 1,29. Cela donne environ 12,9 cm² sur la figure.

4- Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{e^x}{1+e^x}$ tend vers 1, donc $\ln\frac{e^x}{1+e^x}$ tend vers 0. Comme de plus f (x) tend vers 0, on a F(x) qui tend vers 2 ln 2. Cela signifie que l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses pour les x positifs est égale à 2 ln 2.

III-

1. Courbe.



2- $u_{n+1} = u_n + f(n+1)$, comme $f(n+1)>0$, on a $u_{n+1} > u_n$, la suite u_n est croissante.

3- a) Comme f est décroissante, on a pour tout réel t de $[k\text{-}1; k]$, $f(k) < f(t)$. En intégrant de k-1 à k on obtient $\int_{k-1}^{k} f(k)\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$, soit $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

b) Comme $u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, en appliquant le résultat précédent on a

$u_n \leqslant \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{2} f(t)\,dt + ... + \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$, soit $u_n \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\,dt$ et donc $u_n \leqslant F(n)$.

c) La suite $F(n)$ est majorée par 2ln 2 car elle est croissante et converge vers 2ln 2. La suite u_n est donc aussi majorée par 2ln 2. Comme nous avons vu qu'elle était croissante, nous pouvons en déduire qu'elle est convergente vers une limite inférieure ou égale à 2ln 2.

E. Irrationnalité du nombre *e*

1) $I_1 = \int_{0}^{1} xe^{1-x}\,dx$. On pose u' = e^{1-x} et v = x; on a donc u = $-e^{1-x}$ et v' = 1. Une intégration par parties donne : $I_1 = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 + \int_{0}^{1} e^{1-x}\,dx = -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -1 - 1 + e = e - 2$.

2) a) Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$, puis $1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$, et en multipliant par x^n qui est positif $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n$.

b) $J_n = \int_{0}^{1} x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

b) $J_n = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

c) Comme $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n$, $\int_0^1 x^n dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^n ex^n dx$, soit $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

3) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$. On pose u' = e^{1-x} et v = x^{n+1}; on a donc u = $-e^{1-x}$ et v' = $(n+1)x^n$. Une intégration par parties donne : $I_{n+1} = \left[-x^n e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1) x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1)I_n$.

4) a) $k_{n+1} = (n+1)!\, e - I_{n+1} = (n+1)!\, e + 1 - (n+1)I_n = 1 + (n+1)(n!\, e - I_n) = 1 + (n+1)k_n$

b) $k_1 = 1!\, e - I_1 = e - (e - 2) = 2$.

c) k_1 est un nombre entier. Supposons que k_n soit un nombre entier. Alors $k_{n+1} = 1 + (n+1)k_n$ sera aussi un nombre entier. On a ainsi montré par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 k_n est un nombre entier.

d) $n!e = k_n + I_n$. Or k_n est un nombre entier. De plus, $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$ donc pour $n > 1$, $0 < I_n < 1$. La somme d'un nombre entier et d'un nombre situé entre 0 et 1 ne peut pas être un nombre entier, donc $n!e$ n'est pas un nombre entier.

5) Pour $n \geqslant q$, $n!$ est divisible par q donc $\frac{n!\, p}{q}$ est un nombre entier.

Si le nombre e était rationnel, il existerait deux entiers p et q tels que $e = \frac{p}{q}$. En choisissant un entier n supérieur à q, $n!\, e = \frac{n!\, p}{q}$ donc $n!e$ serait entier. Or nous avons montré que $n!e$ n'est pas un nombre entier. Il y a donc contradiction, e n'est pas un nombre rationnel.